

# Procedimentos Lineares para Identificação e Estimação dos Parâmetros de Modelos

Paulo Roberto de Holanda Sales\*

Basilio de Bragança Pereira\*\*

Ailton de Mesquita Vieira\*\*\*

## RESUMO

Este artigo apresenta procedimentos lineares para identificação e estimação de parâmetros de modelos ARMA, ARMAX (TF), SURARMA (CARMA), MARMA (VARMA) e MARMAX. Os algoritmos são baseados nos trabalhos de Hannan e co-autores e aplicados a séries temporais hidrológicas de vazões mensais em reservatórios do Brasil.

Palavras-chave: Modelos ARMA, ARMAX, SURARMA, MARMA e MARMAX, Regressão/auto-regressão. Critérios de Informação. Séries endógenas e exógenas, Séries de vazões.

## 1. INTRODUÇÃO

---

O sistema interligado de geração elétrica-hidrotérmica brasileiro tem capacidade instalada de 55020 MW das quais 93% são de usinas hidroelétricas. Desde 1973, GCOI - Grupo Coordenador para Operação Interligada do sistema, que tem representantes das 18 principais companhias distribuidoras e da Eletrobrás, é responsável em obter a mais eficiente utilização dos recursos hidro e térmicos do sistema. As atividades do GCOI variam desde o planejamento de operações para os próximos cinco anos até o controle em tempo-real do sistema. Nestas operações de planejamento, a previsão de vazões mensais tem um papel importante como visto em Terry et al. (1985).

---

\* Endereço para correspondência: ELETROBRÁS e Instituto de Matemática e Estatística - UERJ.

\*\* Faculdade de Medicina - NESC e COPPE/UFRJ.

\*\*\* ELETROBRÁS.

Até este trabalho, as previsões de vazões mensais do GCOI eram baseadas na metodologia de Box-Jenkins, Sales (1977) ou Sallas et al. (1980). Na seleção de uma metodologia para um conjunto de dados particular devemos ter em mente as seguintes questões:

(a) porque a técnica foi usada em vez de outra técnica ?

(b) o que levou a escolha da técnica nesta aplicação ?

(c) que utilidade tem os modelos escolhidos ?

Baseado na dimensão do sistema elétrico brasileiro e também na natureza das necessidades do GCOI, combinado com diversas longas séries temporais hidrológicas, cada uma com mais de 600 observações mensais, os métodos lineares automáticos fornecem uma metodologia eficiente e rápida, e por conseqüência uma melhor performance do grupo do GCOI envolvido, do que se usarem métodos não-lineares e não-automáticos em que a função do analista de séries temporais é vital. Além disso, a cada ano alguns representantes das companhias distribuidoras são substituídos e o grupo tem que fornecer treinamento para os novos componentes, e neste caso métodos automáticos são bem-vindos.

Considere-se as relações de dependência entre duas ou mais séries temporais. Os três tipos básicos de dependência podem ser classificados como: contemporânea, unidirecional ou triangular, e de retroalimentação (feedback).

(i) Duas ou mais séries têm relação contemporânea quando os valores presentes são relacionados, isto é, as séries apresentam causalidade instantânea. As vazões em diferentes estações de medição de uma região fornecem um exemplo deste caso se a dependência é apenas contemporânea e, portanto, as mesmas não são relacionadas às modificações naturais ou do homem. A maior dependência então se deve à precipitação, isto é, às séries de entradas das bacias hidrográficas.

(ii) Causalidade unidirecional para duas séries  $x$  e  $y$  pode ser definida quando  $x$  causa  $y$ . Então valores de  $y$  são melhores explicados por seu passado e pelo passado de  $x$ . Como exemplo, vazões de entrada na bacia são importantes (causa) para explicar as vazões afluentes em um outro posto a jusantes do primeiro no mesmo rio, mas não vice-versa. Outro exemplo de causalidade unidirecional seria "chuva" X vazão.

(iii) Uma relação de feedback existe se e só se existe causalidade em ambas as direções. Neste caso a relação é simétrica, isto é,  $x$  causa  $y$  e  $y$  causa  $x$ . Como exemplo, poderíamos mencionar as séries de precipitação e evapotranspiração de uma bacia hidrográfica ou mais ainda, precipitação, evaporação e o armazenamento em um reservatório.

(iv) Finalmente, não é comum, porém possível, encontrar relações mistas entre três ou mais séries. Isto é, duas delas podem ser relacionadas contemporaneamente, porém elas são relacionadas unidirecionalmente com uma terceira e assim por diante.

Neste artigo uma metodologia para modelagem de séries temporais introduzidas no grupo GCOI é apresentada. Ela é combinada com a análise estrutural de Yevjevich e será chamada metodologia de Yevjevich/Hannan. Na Seção 2, modelos de séries temporais para a componente estocástica são apresentados. A Seção 3 apresenta os algoritmos para identificação e estimação destes modelos. Aplicações em séries temporais hidrológicas do Brasil são apresentadas na Seção 4 e alguns comentários na Seção 5.

## 2. MODELOS PARA SÉRIES TEMPORAIS

Um grande número de modelos para séries temporais univariadas e multivariadas tem sido proposto em hidrologia, e eles podem ser classificados de acordo com as relações de dependência mencionadas previamente.

Nesta seção, uma descrição das seguintes subclasses de modelos será apresentada: Auto-regressivo Média Móvel (ARMA), ARMA Exógeno ou Função de Transferência (ARMAX ou TF), ARMA Aparentemente Não Relacionado ou Contemporâneo ARMA (SURARMA ou CARMA), ARMA Multivariado ou Vetorial (MARMA ou VARMA) e MARMA Exógeno (MARMAX). Outros modelos como Regressão Múltipla Agregativos, Periódicos ARMA (PARMA) e ARMA Espaço-Temporal (STARMA) não serão abordados.

Considere-se  $m$  séries temporais representadas por:

$$\underline{W}_t = [W_{1t}, W_{2t}, \dots, W_{mt}] \quad (1)$$

e vetor de médias

$$\underline{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m] \quad (2)$$

e

$$\underline{W}_t = \underline{W}_t^* - \underline{\mu} \quad (3)$$

O modelo MARMA ( $p, q$ ) é descrito por:

$$\Phi_p(B)Z_t = \Theta_q(B)a_t \quad (4)$$

onde,

(i) B é o operador de retardo definido por  $B^h W_t^h = W_{t-h}$ ;

(ii)  $\Phi_p(B)$  e  $\Theta_q(B)$  são matrizes de coeficientes auto-regressivos e médias móveis respectivamente, cujos elementos  $\phi_{ij}(B)$  e  $\theta_{ij}(B)$  são polinômios de graus  $p_{ij} (\leq p)$  e  $q_{ij} (\leq q)$  em B.

(iii)  $Z_t = [\nabla^{d_1} \nabla_{s_1}^{D_1} W_{1t}^{(\lambda_1)}, \dots, \nabla^{d_m} \nabla_{s_m}^{D_m} W_{mt}^{(\lambda_m)}]$ ;

(iv)  $\nabla^{d_i} = [1 - B]^{d_i}$  é o operador de diferenças de ordem d das séries  $i \left[ i = \overline{1, m} \right]$ ;

(v)  $\nabla_{s_i}^{D_i} = [1 - B^{s_i}]^{D_i}$  é o operador de diferenças sazonal de ordem  $D_i$  e período sazonal  $s_i$  das séries  $i \left[ i = \overline{1, m} \right]$ ;

(vi)  $W_{it}^{(\lambda_i)}$  é a transformação do tipo Box & Cox para as séries  $i \left[ i = \overline{1, m} \right]$ ; e

(vii)  $a_{\sim t}$  é o vetor de variáveis aleatórias normais independentes e identicamente distribuídas com média zero e matriz de covariância  $\Omega$ . Isto é, as inovações  $a_{it} \left[ i = \overline{1, m} \right]$  são os erros de previsão um passo a frente quando os parâmetros do modelo são conhecidos.

O Processo (4) é dito estacionário e inversível, respectivamente, se e só se as raízes das equações determinantes  $|\Phi_p(B)| = 0$  e  $|\Theta_q(B)| = 0$  estão fora do círculo unitário.

Com relação ao modelo completo multivariado expresso por (4), observe-se que:

(i) durante o processo de construção do modelo os graus dos operadores  $\Phi_{ij}(B)$  e  $\Theta_{ij}(B)$  podem ser ajustados de forma que os modelos ARMA para cada série temporal descrevam precisamente o comportamento de cada série;

(ii) o modelo SURARMA é o resultado dos coeficientes de  $\Phi_{ij}(B)$  e  $\Theta_{ij}(B)$  serem nulos para  $i \neq j$ , isto é, as matrizes de parâmetros são diagonais;

(iii) o modelo ARMAX é obtido quando os coeficientes  $\Phi_{ij}(B)$  e  $\Theta_{ij}(B)$  são nulos para  $i < j$  ou, em outras palavras, quando as matrizes de parâmetros são triangulares; e

(iv) o modelo MARMAX é obtido quando se retira uma ou mais linhas da matriz de parâmetros auto-regressivos,  $\Phi_p(B)$ , e uma ou mais colunas da matriz de parâmetros médias móveis,  $\Theta_q(B)$ .

### 3. ALGORITMOS

Nesta seção quatro algoritmos lineares são apresentados para identificação e estimação de parâmetros de modelos ARMA, ARMAX, SURARMA e MARMA (p, q) como apresentados em Sales (1989) e Sales et al. (1987 e 1989 a, b) para séries temporais hidrológicas.

Os algoritmos foram originalmente propostos por Hannan e Rissanen (1982) e outros desenvolvimentos são apresentados também em Hannan e Deistler (1988).

#### 3.1 – Modelos ARMA (p, q) Univariados

Seja  $\{Z_t, t=1, \dots, T\}$  uma série temporal estacionária gerada por um modelo ARMA definido por:

$$\phi_p(B) Z_t = \theta_q(B) a_t \quad (5)$$

onde,

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1(B) - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1(B) - \dots - \theta_q B^q.$$

Os parâmetros do modelo são denotados  $\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ .

Um algoritmo linear para identificação e estimação de parâmetros do modelo ARMA (p, q) é definido como:

#### Passo I – Preliminar

Um modelo auto-regressivo de ordem n é ajustado para as observações  $Z_t$  ( $t = 1, \dots, T$ ). A estimativa de  $\{a_t\}$  no modelo,

$$\phi_n(B) Z_t = a_t \quad (6)$$

é dada por:

$$\hat{a}_t = \sum_{i=1}^n \hat{\phi}_i Z_{t-i} \quad (7)$$

onde,

$$\hat{\phi}_0 = 1 \text{ e } Z_t = 0, \quad \forall t \leq 0.$$

Neste caso,  $n$  é selecionado de forma a minimizar:

$$\text{BIC}(v) = \ln \hat{\sigma}_v^2 + v \frac{\ln T}{T} \quad (8)$$

Onde,  $\hat{\sigma}_v^2$  é a estimativa de  $\sigma_a^2$  na auto-regressão de ordem  $v$ . É suficiente que  $v \leq [\ln T]^{+\delta}$ ,  $\delta > 0$ .

## Passo II – Identificação e Estimação Inicial

As ordens  $p$ ,  $q$  e a variância dos resíduos  $\sigma_a^2$  são estimadas por  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{q}$  e  $\tilde{\sigma}_a^2$ , ao regredir  $Z_t$  em  $Z_{t-i}$  ( $i=1, \dots, p$ ) e  $\hat{a}_1$  ( $i=1, \dots, q$ ). A estimativa inicial  $\beta_0 = \begin{pmatrix} \phi_0 & \theta_0 \\ -0 & -0 \end{pmatrix}$ , do vetor de parâmetros  $\beta = \begin{pmatrix} \phi_0 & \theta_0 \\ -0 & -0 \end{pmatrix}$  do modelo, é também estimada neste passo. Neste caso, as estimativas deverão minimizar:

$$\text{BIC}(p, q) = \ln \sigma_{p,q}^2 + (p+q) \frac{\ln T}{T} \quad (9)$$

## Passo III – Estimação Final

Dado  $(\tilde{p}, \tilde{q})$ ,  $\beta_0 = \begin{pmatrix} \phi_0 & \theta_0 \\ -0 & -0 \end{pmatrix}$  e usando

$$\hat{a}_{t,0} = \phi_{\tilde{p},0}(B) \theta_{\tilde{q},0}^{-1}(B) Z_t \quad (10)$$

e as séries auxiliares  $\{u_t\}$  e  $\{v_t\}$ , definidas como:

$$u_{i,t} = - \left. \frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \phi_i} \right|_{\beta_0} = v_{t-i} \quad (11)$$

$$v_{i,t} = - \frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \phi_i} \Big|_{\beta_0} = v_{t-i} \quad (12)$$

onde,

$$u_t = \theta_{\bar{q},0}^{-1}(\mathbf{B}) Z_t = \phi_{\bar{p},0}(\mathbf{B}) \hat{a}_{t,0} \quad (13)$$

$$v_t = \theta_{\bar{q},0}^{-2}(\mathbf{B}) Z_t = \phi_{\bar{p},0}(\mathbf{B}) Z_t = -\theta_{\bar{q},0}^{-1}(\mathbf{B}) \hat{a}_{t,0} \quad (14)$$

A seguinte regressão linear fornece um conjunto de (segundas) estimativas:

$$\hat{a}_{t,0} = \sum_{i=1}^{\bar{p}} [\phi_i - \phi_{i,0}] u_{t-i} + \sum_{i=1}^{\bar{q}} [\theta_i - \theta_{i,0}] v_{t-i} + \hat{a}_t \quad (15)$$

Alternativamente (15) pode ser escrita como:

$$\hat{a}_{t,0} + u_t + v_t = \sum_{i=1}^{\bar{p}} \phi_i u_{t-i} + \sum_{i=1}^{\bar{q}} \theta_i v_{t-i} + \hat{a}_t \quad (16)$$

Em outras palavras, é suficiente regredir, em cada iteração,  $[\tilde{a}_{t,0} + u_t + v_t]$  nas variáveis auxiliares  $u_{i,t}$  ( $i = \overline{1,p}$ ) e  $v_{i,t}$  ( $i = \overline{1,q}$ ). O processo continua até obter convergência.

Observe que a busca de  $p$  e  $q$  no Passo II pode ser feita economicamente como em Hannan and Rissanen (1982) e Poskitt (1987), isto é, primeiro fixe  $p = q$ ,  $\tilde{p}$  então obtido é uma estimativa consistente de  $\max(p, q)$ . Portanto é necessário somente fazer a busca entre os modelos ARMA ( $\tilde{p}, r$ ) e ARMA ( $r, \tilde{p}$ ),  $r = 0, 1, \dots, \tilde{p} - 1$  usando um critério de informação.

### 3.2 – Modelos de Função de Transferência/ARMAX

Sejam  $\{Z_t\}$ ,  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$ , respectivamente, as séries endógena e exógenas. Suponha que elas são relacionadas pelo modelo ARMAX:

$$C_p(\mathbf{B}) Z_t = D_r(\mathbf{B}) X_t + E_s(\mathbf{B}) Y_t + F_q(\mathbf{B}) a_t ; \quad (17)$$

onde,

$$C_p(B) = 1 - c_1 B - \dots - c_p B^p;$$

$$D_r(B) = d_0 - d_1 B - \dots - d_r B^r;$$

$$E_s(B) = e_0 - e_1 B - \dots - e_s B^s; e$$

$$F_q(B) = 1 - f_1 B - \dots - f_q B^q$$

A série de resíduos  $\{a_t\}$  pode ser estimada por:

$$\hat{a}_{t,0} = F_{q,0}^{-1}(B) [C_{p,0}(B) Z_t - D_{r,0}(B) X_t - E_{s,0}(B) Y_t] \quad (18)$$

e as séries auxiliares  $\{m_t\}$ ,  $\{n_t\}$ ,  $\{u_t\}$  e  $\{v_t\}$  são dadas por

$$m_{i,t} = - \left. \frac{\partial \hat{a}_t}{\partial c_i} \right|_{\xi_0} = m_{t-i}; \quad m_t = F_{q,0}^{-1}(B) Z_t; \quad (19)$$

$$n_{i,t} = - \left. \frac{\partial \hat{a}_t}{\partial d_i} \right|_{\xi_0} = n_{t-i}; \quad n_t = F_{q,0}^{-1}(B) X_t; \quad (20)$$

$$u_{i,t} = - \left. \frac{\partial \hat{a}_t}{\partial e_i} \right|_{\xi_0} = u_{t-i}; \quad u_t = F_{q,0}^{-1}(B) Y_t; e \quad (21)$$

$$v_{i,t} = - \left. \frac{\partial \hat{a}_t}{\partial f_i} \right|_{\xi_0} = v_{t-i}; \quad v_t = F_{q,0}^{-1}(B) \hat{a}_t. \quad (22)$$

Logo, um algoritmo linear para identificação das ordens e a estimação dos parâmetros do modelo ARMAX, como definido por (17), pode ser sumarizado por:

### Passo I - Preliminar

Ajuste às observações  $\{Z_t\}$ ,  $\{X_t\}$  e  $\{Y_t\}$  o seguinte modelo regressivo-auto-regressivo:

$$\sum_{i=0}^h \hat{c}_i Z_{t-1} = \sum_{i=1}^h \hat{d}_i X_{t-1} + \sum_{i=1}^h \hat{e}_i Y_{t-1} + \hat{a}_1 \quad (23)$$



onde,

$$\hat{\sigma}_h^2 = \frac{T_1}{T} \sum_{t=1} \hat{a}_t \quad (24)$$

e  $h$  é tal que

$$\text{BIC}(h) = \ln \hat{\sigma}_h^2 + 3h \frac{\ln T}{T} \quad (25)$$

é um mínimo.

## Passo II – Identificação e Estimação Inicial

Para cada  $p, q, r$  e  $s$ , regredir  $Z$  em

$$-Z_{t-i} \left( i = \overline{1, p} \right), X_{t-i} \left( i = \overline{1, r} \right), Y_{t-i} \left( i = \overline{1, s} \right) \text{ e } \hat{a}_{1,t-1} \left( i = \overline{1, q} \right)$$

Seja  $\xi$  um vetor cujos elementos  $k = p + q + r + s$  são os parâmetros do modelo.  $k$  é tal que minimiza:

$$\text{BIC}(k) = \ln \hat{\sigma}_k^2 + k \frac{\ln T}{T}. \quad (26)$$

## Passo III – Estimação Final

Com as segundas estimativas dos resíduos obtidos no passo anterior, isto é:

$$\hat{a}_{z_t} = \sum_{i=1}^p \hat{c}_{z_t} - \sum_{i=1}^r \hat{d}_{z_t} X_{t-i} - \sum_{i=1}^s \hat{e}_{z_t} Y_{t-i} - \sum_{i=1}^q \hat{f}_{z_t} \hat{a}_{z_{t-i}} \quad (27)$$

onde

$$\hat{a}_{z_t} = Z_t = X_t = Y_t = 0, \quad \forall t \leq 0$$

e com as séries auxiliares dadas por (19), (20), (21) e (22), use séries de Taylor em  $\xi_{-0}$  para

obter novas estimativas dos parâmetros

$$\langle \hat{a}_t | \xi, Z_t, X_t, Y_t \rangle = \langle \hat{a}_{t_0} | \xi_{-0}, Z_t, X_t, Y_t \rangle - \sum_{i=1}^k (\xi_i - \xi_{i,0}) \eta_{i,t} \quad (28)$$

onde

$$\eta_{i,t} = - \frac{\partial \langle \hat{a}_t | \xi, Z_t, X_t, Y_t \rangle}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi=\xi_0} \quad (29)$$

onde  $\langle . \rangle$  derrota valor esperado.

O procedimento é repetido até a convergência final.

Aqui, como no caso ARMA, uma busca consistente e econômica para  $(p, q, r, s, q)$  é dada pelo Teorema 3 de Poskitt (1989).

### 3.3 – Modelos SURARMA/CARMA $(p, q)$

Considere-se o sistema de  $m$  equações ARMA  $(p_i, q_i)$ :

$$\phi_i(B) \tilde{Z}_i = \theta_i(B) a_i, \quad 1 \leq i \leq m \quad (30)$$

onde,

$$\tilde{Z}_i = Z_i - \mu_i.$$

O modelo definido em (30) é chamado CARMA  $(p, q)$  onde  $p = \max(p_1, \dots, p_m)$  e  $q = \max(q_1, \dots, q_m)$  se as inovações  $\{a_i\}$  são somente contemporaneamente relacionadas. Neste caso, as matrizes dos parâmetros são diagonais. Como consequência, esta classe de modelos pode ser vista como uma extensão natural do caso univariado e de acordo com Camacho et al. (1985), Camacho e McLeod (1987), como um caso particular do caso multivariado. Por outro lado ela pode ser vista como um conjunto de  $m$  modelos ARMA aparentemente não correlacionados ou modelo SURARMA de acordo com Nelson (1976).

Um algoritmo linear para estimação e identificação do modelo SURARMA  $(p, q)$  pode ser resumido como:

#### Passo I - Preliminar

Para cada uma das  $n$  equações do modelo SURARMA definido por (30) aplica-se o algoritmo de identificação e estimação proposto na seção 3.1.

## Passo II – Identificação e Estimação Inicial

Com as  $m$  séries de resíduos  $\{\hat{a}_i\}$  do passo anterior, obtenha a matriz de correlação cruzada  $\tilde{\Omega}$  para as séries  $\{\hat{a}_i\}$  e  $\{\hat{a}_j\}$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ , isto é:

$$\hat{\omega}_{i,j} = \frac{\hat{a}_i \hat{a}_j}{T} \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (31)$$

Se o modelo SURARMA é adequado, só as correlações no lag zero devem ser significativamente diferentes de zero.

Expandindo  $\{\hat{a}_i\}$  em série de Taylor em  $\beta_{-i_0} = \begin{bmatrix} \phi_{-i_0} & \theta_{-i_0} \end{bmatrix}$  obtém-se aproximadamente,

$$\hat{a}_{i,0} = \sum_{j=1}^{k_i} \begin{bmatrix} \beta_{-i_0} & -\beta_{-i_0} \\ -\beta_{-i_0} & -\beta_{-i_0} \end{bmatrix} X_{i,t-j} + \hat{a}_i \quad (32)$$

onde

$$X_{i,t-j} = - \left. \frac{\partial \hat{a}_i}{\partial \beta_{i,j}} \right|_{\beta_{-i_0}} \quad (33)$$

e  $k = p_i + q_i, i = 1, \dots, m$ .

A equação (32) pode ser escrita como

$$\hat{a}_{t,0} = X_t \beta + \hat{a}_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (34)$$

onde  $\hat{a}_{t,0}$  é um vetor ( $m \times 1$ ) e  $X_t$  é uma matriz ( $m \times k$ ):

$$X_t = \begin{bmatrix} X_1' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & X_{m,t} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

O estimador MQG (mínimos quadrados generalizados viável) é dado por:

$$\hat{\beta} = \left[ \sum_{t=1}^T X_t' \hat{\Omega}^{-1} X_t \right]^{-1} \sum_{t=1}^T X_t' \hat{\Omega}^{-1} \hat{a}_{t0} \quad (36)$$

e a matriz de covariância de  $\hat{\beta}$  por

$$\text{VAR}(\hat{\beta}) = \left[ \sum_{t=1}^T X_t' \hat{\Omega}^{-1} X_t \right]^{-1}. \quad (37)$$

### Passo III – Estimação Final

Obtenha um novo conjunto de  $m$  séries de resíduos de (34) e então aplique (31), (33), (35), (36) e (37) até que a convergência seja obtida.

### 3.4 – Modelos MARMA (p, q)

Considere-se um conjunto de  $m$  séries temporais representadas por (1) e suponha que elas podem ser modeladas por um modelo ARMA (p, q) multivariado como definido em (1). Um algoritmo para identificação da ordem (p, q) e da estimação dos parâmetros correspondentes é:

#### Passo I - Preliminar

Considere-se, inicialmente, modelos estritamente auto-regressivos de ordem  $k$ ,

$$\tilde{Z}_{-t} = \phi_1 \tilde{Z}_{-t-1} + \dots + \phi_k \tilde{Z}_{-t-k} + \hat{a}_{-k,t} \quad (38)$$

onde,

$$\langle \hat{a}_{k,t}, \hat{a}_{k,s} \rangle = \begin{cases} \hat{\Omega}, & t = s \\ 0, & \text{de outro modo.} \end{cases}$$

Estime (38) para todos os valores possíveis de  $k$ . A ordem da auto-regressão é tal que minimiza

$$\text{AIC}(k) = \ln |\hat{\Omega}_k| + \frac{2km^2}{T} \quad (39)$$

onde  $T$  é o menor número de observações entre as  $m$  séries.

O critério AIC é conservador pois sobrestima a ordem do modelo. Entretanto, o principal objetivo do Passo I é estimar as  $m$  séries de resíduos e não o modelo verdadeiro.

As inovações podem ser estimadas por

$$\hat{a}_t = \tilde{Z}_t - \hat{\phi}_1 \tilde{Z}_{t-1}, \dots, \hat{\phi}_k \tilde{Z}_{t-k}. \quad (40)$$

## Passo II – Identificação e Estimação Inicial

Obtenha, para os diversos valores de  $p$  e  $q$ , as regressões  $\tilde{Z}_t$  em  $\tilde{Z}_{t-i}$  ( $i = 1, \dots, q$ ) e,  $\hat{a}_t$  onde  $\hat{a}_t$  são obtidos de (40).

Os modelos estimados neste passo são:

$$\tilde{Z}_t = \hat{\phi}_1 \tilde{Z}_{t-1} + \dots + \hat{\phi}_p \tilde{Z}_{t-p} - \hat{\theta}_1 \hat{a}_{t-1}, \dots, -\hat{\theta}_q \hat{a}_{t-q} + \hat{a}_{t-p,q} \quad (41)$$

onde  $\hat{a}_{t-p,q}$  é o novo vetor de resíduos.

A vantagem do passo anterior é que a equação (41) pode ser facilmente estimada por mínimos quadrados ordinários.

Finalmente, selecione  $p$  e  $q$  tal que

$$\text{BIC}(p, q) = \ln |\hat{\Omega}_{p,q}| + (p+q)m^2 \frac{\ln T}{T}. \quad (42)$$

Então, após a seleção das ordens  $p$  e  $q$ , obtém-se

$$\hat{a}_t = \tilde{Z}_t - \hat{\phi}_1 \tilde{Z}_{t-1} - \dots - \hat{\phi}_p \tilde{Z}_{t-p} + \hat{\theta}_1 \hat{a}_{t-1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{a}_{t-q}. \quad (43)$$

## Passo III – Estimação Final

O procedimento consiste em linearizar  $\hat{a}_t$  em  $\beta_{0i}$  ( $i = 1, \dots, k$ ), onde  $\beta_{0i}$  é uma estimativa inicial do vetor de parâmetros auto-regressivos e médios móveis,  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), obtido no passo anterior. Então a expressão do estimador de  $\beta_i$  pode ser escrita como

$$\hat{\beta}_{\sim j} = \left[ \sum_{t=\sim i}^T \hat{a}^{i'} \hat{\Omega}_{p,q}^{-i} \hat{a}^i \right]^{-1} \sum_{t=\sim i}^T \hat{a}^{i'} \hat{\Omega}_{p,q}^{-i} \hat{a}_{\sim t,0} \quad (44)$$

onde  $\hat{a}_{\sim t}$  é a derivada parcial de  $\hat{a}_{\sim t}$  com respeito a  $\beta_i$ .

O estimador da variância assintótica de  $\hat{\beta}_i$  é dado por

$$\text{VAR} \left( \hat{\beta}_{\sim j} \right) = \left[ \sum_{t=\sim i}^T \hat{a}^{i'} \hat{\Omega}_{p,q}^{-1} \hat{a}^i \right]^{-1} \quad (45)$$

e o estimador da covariância entre  $\hat{\beta}_i$  e  $\hat{\beta}_j$  é dado por

$$\text{COV}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j) = \left[ \sum_{t=\sim i}^T \hat{a}^{i'} \hat{\Omega}_{p,q}^{-1} \hat{a}^j \right]^{-1} \quad (46)$$

Se o modelo não tem termos médias-móveis,  $a_{\sim t}$  é linear em  $\beta_{\sim i}$  e a solução é dada

simplesmente por:

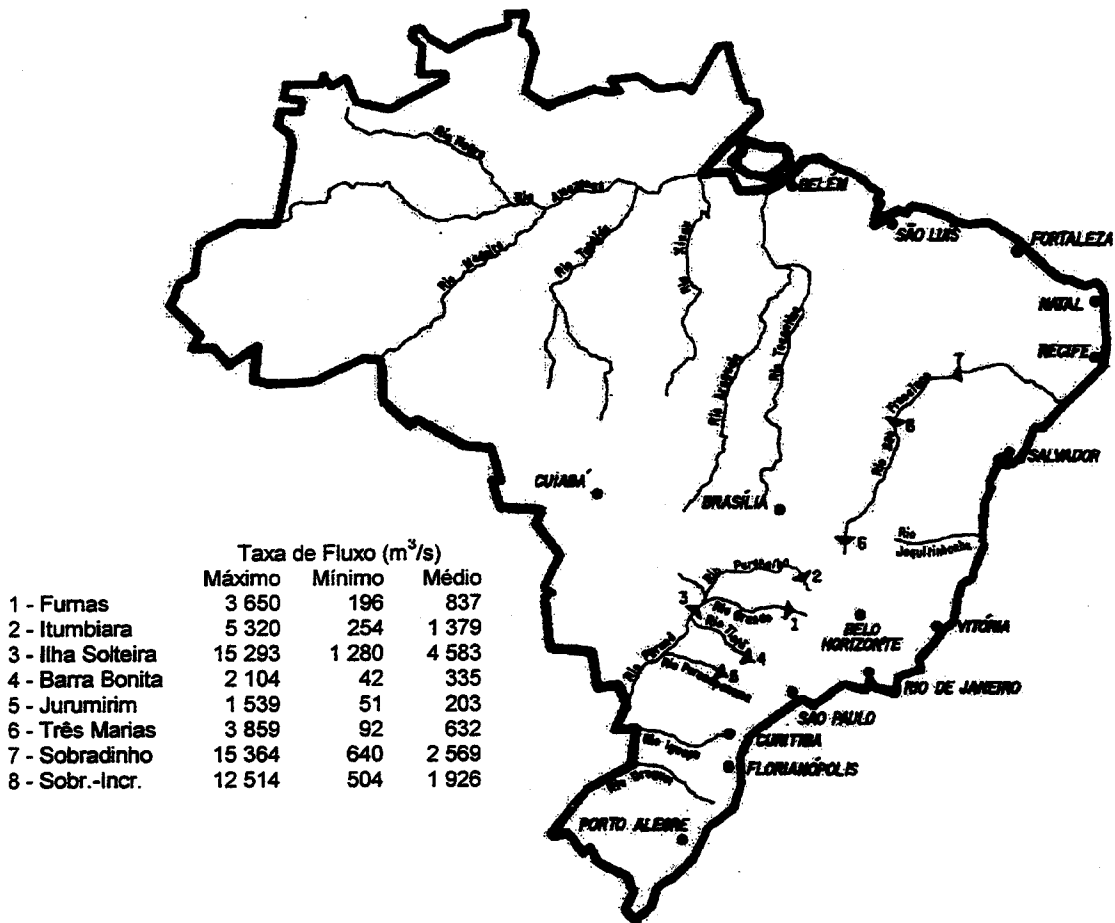
$$\hat{\beta}_{\sim} = \hat{\beta}_{\sim 0} + \left[ \hat{\beta}_{\sim} - \hat{\beta}_{\sim 0} \right] \quad (47)$$

Caso contrário, um novo vetor de estimadores do parâmetro dado por (47) é usado no lugar de  $\hat{\beta}_{\sim 0}$  e o processo de linearização é repetido até a convergência.

#### 4. APLICAÇÕES

Os algoritmos propostos foram usados em oito séries de vazões naturais mensais nos reservatórios de Fumas no Rio Grande, Itumbiara no Rio Paranaíba, Ilha Solteira no Rio Paraná, Barra Bonita no Rio Tietê, Jurumirim no Rio Paranapanema, Três Marias e Sobradinho no Rio São Francisco, bem como a série incremental de Sobradinho. Cada uma das séries temporais hidrológicas analisadas tem 648 observações. Os dados cobrem o período de janeiro de 1931 a dezembro de 1984 e foram obtidos das Centrais Elétricas Brasileiras S. A. – ELETROBRÁS – Brasil – Figura 1.

Figura 1- Localização das séries temporais usadas nos algoritmos lineares



Inicialmente, pela natureza das séries temporais hidrológicas, foi necessário transformar os dados usando a transformação de Box & Cox, dada por:

$$Z_t^{(\lambda_1, \lambda_2)} = \begin{cases} \lambda_1^{-1} [(Z_t + \lambda_2)^{\lambda_1} - 1] & , \lambda_1 \neq 0 \\ \ln(Z_t + \lambda_2) & , \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (49)$$

Este tipo de transformação pode evitar problemas com heteroscedasticidade e não-normalidade nas séries. De acordo com a Tabela 1 todas as séries foram transformadas tomando o logaritmo.

Tabela 1 – Transformação de Box-Cox para as séries mensais das taxas de vazões mensais

Séries	$\lambda_1$	$\lambda_2$
Furnas	0	- 179
Itumbiara	0	- 179
Ilha Solteira	0	- 1238
Barra Bonita	0	- 35
Jurumirim	0	- 45
Três Marias	0	- 90
Sobradinho	0	- 529
Bacia Intermediária	0	- 468

Em seguida, para obter estacionariedade de segunda ordem, cada série foi dessazonalizada subtraindo a média mensal e dividindo pelo desvio padrão mensal cada observação da série dos logaritmos, Sales (1977), Sallas et al. (1980).

#### 4.1 – Modelo univariado ARMA (p, q) para série de Furnas

No Passo I, modelos auto-regressivos foram ajustados. O critério BIC(p) indicou  $p = 2$ . Passando para o Passo II onde “regressões” ARMA são ajustadas para a série transformada e para a série de resíduos obtida no primeiro passo. O critério BIC indicou  $p = q = 1$ .

A partir das estimativas iniciais dos parâmetros do modelo ARMA (1,1) identificado no passo anterior,  $\hat{\phi}_1 = 0.8426$ ,  $\hat{\theta}_1 = -0.2278$  e  $\hat{\sigma}_a^2 = 0.4351$  movemos para o Passo III do algoritmo proposto. As estimativas finais na Tabela 2 foram obtidas após dez iterações com precisão  $1 \times 10^{-4}$ . Erros padrão das estimativas também são dados na Tabela 2.

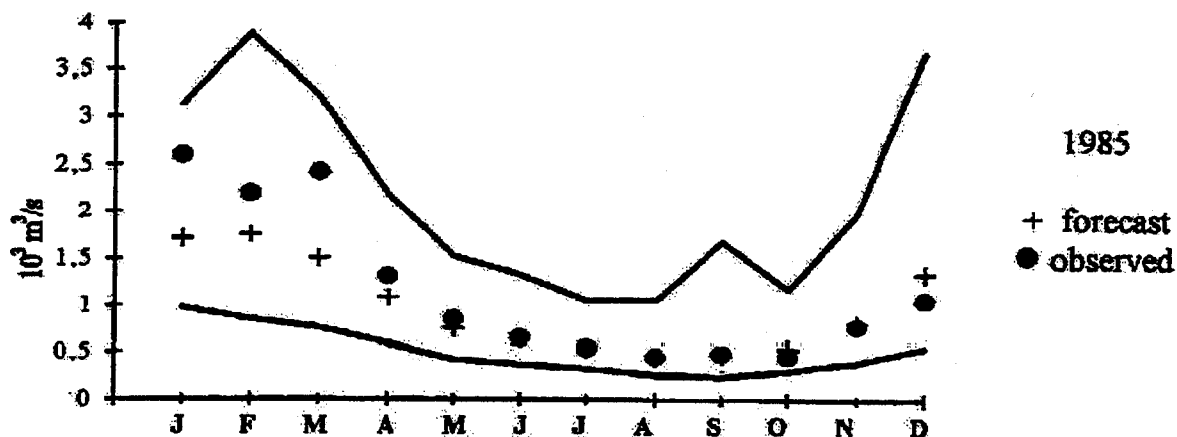
Tabela 2 – Estimativa final dos parâmetros  $\phi_1$ ,  $\theta_1$  e  $\sigma_a^2$  do modelo ARMA (1,1) para Furnas

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão
$\phi_1$	0.8421	0.0237
$\theta_1$	- 0.2398	0.0426
$\sigma_a^2$	0.4343	

Previsões para um ano a frente com intervalos de dois erros padrão são apresentadas na Figura 2.



Figura 2 – Previsões para 1985 com dois erros padrão (EP) modelo ARMA de Furnas



#### 4.2 – Modelo ARMAX (p, r, s, q) para as séries Três Marias, Sobradinho e Incremental de Sobradinho

Diversos modelos de regressão/auto-regressão foram testados no Passo I de acordo com (23) e (24), considerando diversos valores de  $h$ . O critério  $BIC(h)$ , dado em (25) indicou  $h = 2$ .

Partindo para o Passo II onde regressões/auto-regressões são ajustadas para às séries  $\{Z_t\}$ ,  $\{X_t\}$ ,  $\{Y_t\}$  e à série de resíduos  $\{a_t\}$  obtida no passo anterior. A Tabela 3 apresenta os valores de  $BIC(k)$  e as variâncias dos resíduos das regressões/auto-regressões consideradas no Passo II. Neste passo as ordens do modelo ARMAX identificado foram  $p = 1$ ,  $r = 2$ ,  $s = 0$  e  $q = 1$ . As estimativas iniciais dos parâmetros são  $\hat{c}_1 = 0,8075$ ,  $\hat{d}_1 = 0,6227$ ,  $\hat{d}_2 = -0,5202$ ,  $\hat{f}_1 = -0,4130$  e  $\hat{\sigma}_a^2 = 0,2946$ .

Após as estimativas iniciais do Passo II do algoritmo, passamos ao Passo III. As estimativas finais foram obtidas após oito iterações com precisão  $1 \times 10^{-4}$  e são apresentadas na Tabela 4 com os erros padrão correspondentes.

Tabela 3 – Valor de BIC(k),  $K=p+r+s+q$  e as variâncias dos resíduos dos modelos regressão/auto-regressão do Passo II

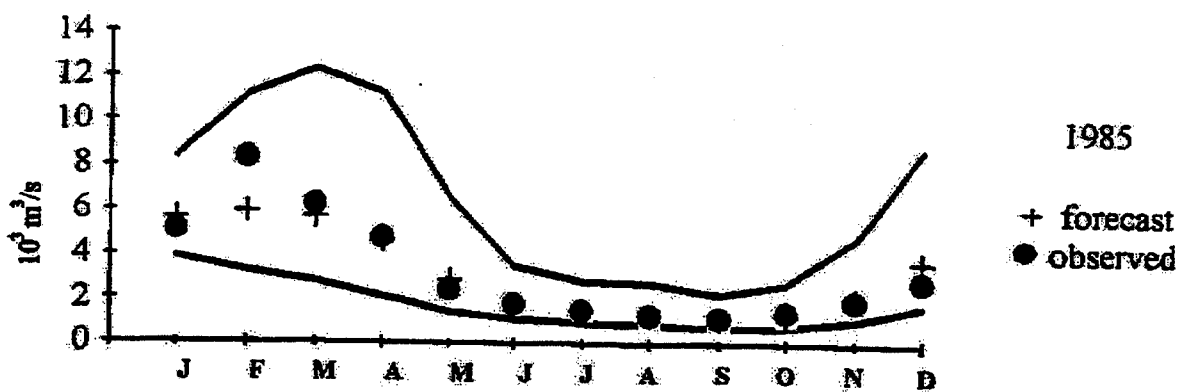
p	q											
	0				1				2			
	r	s			r	s			r	s		
0		1	2	0		1	2	0		1	2	
0	0		-0,6675 (0,5079)	-0,6708 (0,5012)	0	-0,2858 (0,8059)	-0,6708 (0,5012)	-0,6939 (0,4849)	0	-0,3147 (0,7156)	-0,6463 (0,5085)	-0,61 (0,48)
	1	-0,9308 (0,3903)	-1,1122 (0,3223)	-1,1115 (0,3194)	1	-0,9913 (0,3637)	-1,1051 (0,3214)	-1,1418 (0,3067)	1	-1,0258 (0,3479)	-1,0951 (0,3214)	-1,13 (0,30)
	2	-0,9308 (0,3909)	-1,1442 (0,3091)	-1,1710 (0,2979)	2	-0,9938 (0,3592)	-1,1596 (0,3013)	-1,1600 (0,2982)	2	-1,0183 (0,3471)	-1,1486 (0,3016)	-1,15 (0,29)
1	0	-0,8599 (0,4190)	0,9260 (0,3883)	0,9159 (0,3883)	0	-0,8522 (0,4180)	-0,9525 (0,3744)	-1,0061 (0,3513)	0	-0,88442 (0,4172)	-0,9412 (0,3749)	-0,99 (0,35)
	1	-1,0940 (0,3283)	-1,1045 (0,3216)	-1,1081 (0,3173)	1	-1,0954 (0,3245)	-1,0949 (0,3215)	-1,1304 (0,3072)	1	-1,0864 (0,3242)	-1,0850 (0,3214)	-1,16 (0,29)
	2	-1,1557 (0,3055)	-1,1448 (0,3058)	-1,1723 (0,2946)	2	-1,1819 (0,2947)	-1,1709 (0,2950)	-1,1649 (0,2938)	2	-1,1740 (0,2941)	-1,1631 (0,2943)	-1,15 (0,29)
2	0	-0,8485 (0,4196)	-0,9155 (0,3885)	-1,0045 (0,3519)	0	-0,8498 (0,4149)	-0,9730 (0,3632)	-1,0355 (0,3377)	0	-0,8437 (0,4133)	-0,9730 (0,3632)	-1,05 (0,37)
	1	-1,0831 (0,3286)	-1,0980 (0,3205)	-1,1446 (0,3028)	1	-1,1137 (0,3155)	-1,1074 (0,3143)	-1,1454 (0,0296)	1	-1,1030 (0,3157)	-1,0965 (0,3146)	-1,14 (0,29)
	2	-1,1762 (0,2964)	-1,1654 (0,2966)	-1,1660 (0,2935)	2	-1,1732 (0,2943)	-1,1623 (0,2940)	-1,1570 (0,2932)	2	-1,1652 (0,2937)	-1,1645 (0,2939)	-1,10 (0,28)

Tabela 4 – Estimativas finais dos parâmetros  $c_1, d_1, d_2, f_1$  e  $\sigma_a^2$  do modelo ARMAX para Três Marias, Sobradinho e Bacia Intermediária

Séries	Variáveis	Parâmetro	Estimativas	Erro Padrão
Sobradinho	$Z_{t-1}$	$c_1$	0.8469	0.0866
Três Marias	$X_{t-1}$	$D_1$	0.5996	0.0358
	$X_{t-2}$	$D_2$	-0.4626	0.0742
Residual	$a_{t-1}$	$f_1$	-0.3536	0.0899
		$\sigma_a^2$	0.2939	

Previsões ex-ante para um ano à frente com dois erros padrão são apresentadas na Figura 3.

Figura 3 – Previsão ex-ante para 1985 com dois erros padrão. Modelo ARMAX, de Sobradinho com Três Marias como input



#### 4.3 – Modelos SURARMA (p, q) para as Séries: Ilha Solteira, Barra Bonita e Jurumirim

Correlações cruzadas entre os resíduos de modelos univariados foram calculadas para Ilha Solteira, Barra Bonita e Jurumirim. Padrão típicos são apresentados na Figura 4. O comportamento das correlações cruzadas sugere adequação do modelo SURARMA para estas séries.

Figura 4a - Correlação cruzada dos resíduos: Ilha Solteira e Barra Bonita

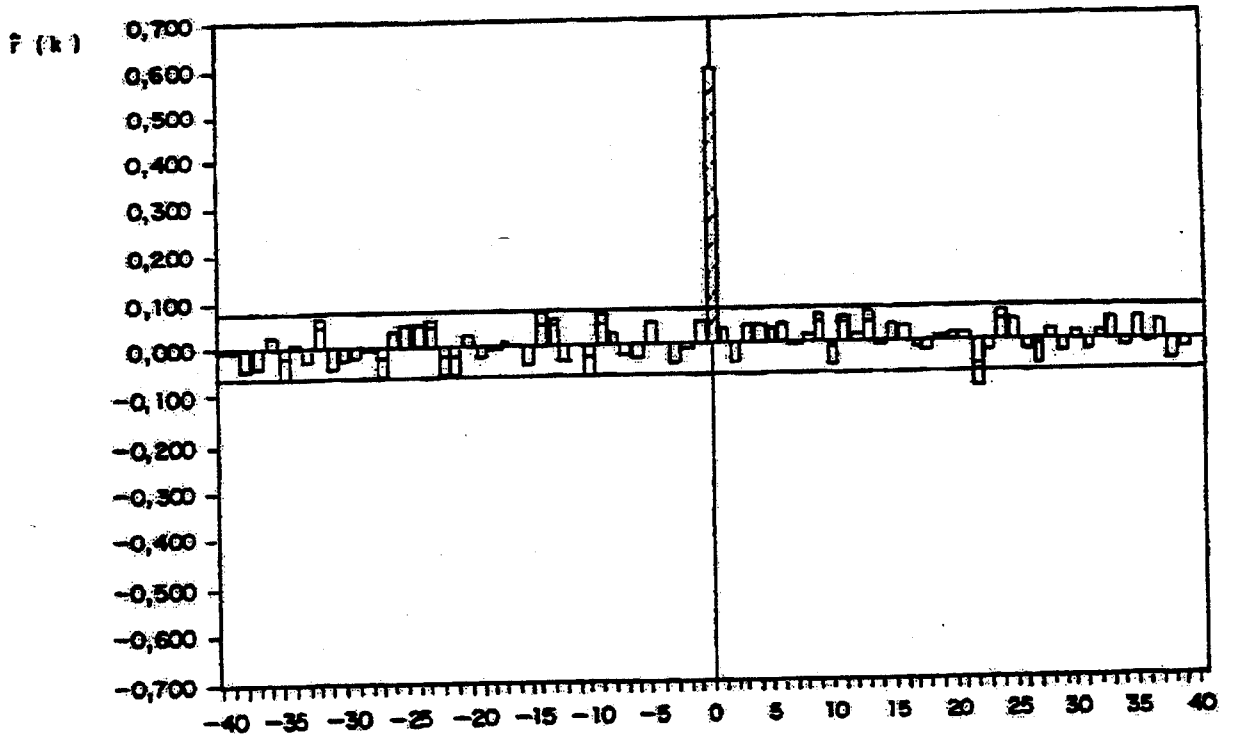


Figura 4b - Correlação cruzada dos resíduos: Barra Bonita e Jurumirim

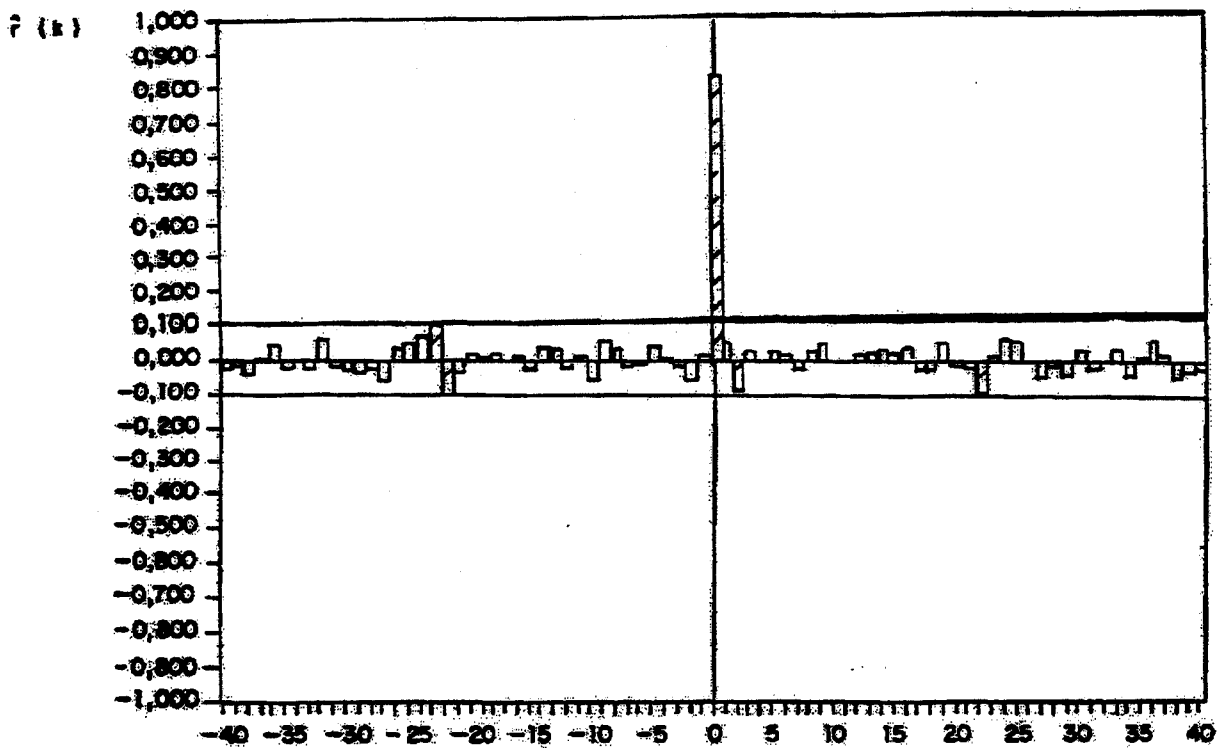
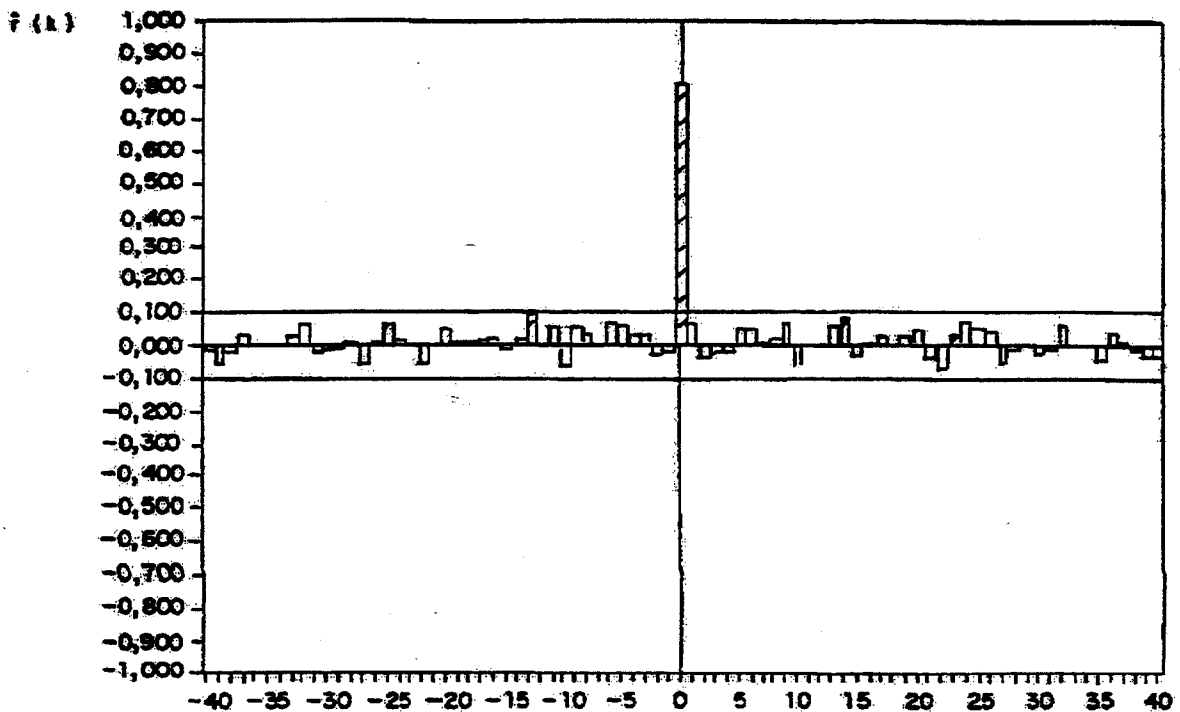


Figura 4c - Correlações cruzadas dos resíduos: Ilha Solteira e Jurumirim



O Passo I do algoritmo consiste em identificar modelos univariados, ARMA  $[p_i, q_i]$  para cada uma das  $i = 1, 2, 3$  séries. Neste estágio, obtêm-se também, as estimativas dos modelos selecionados. Deve-se enfatizar que estes são os valores iniciais do processo iterativo do Passo III e são obtidos aplicando o algoritmo proposto na Seção 3.1 a cada uma das séries. A Tabela 5 apresenta os modelos selecionados.

Tabela 5 - Modelos ARMA  $[p_i, q_i]$  selecionados para Ilha Solteira, Barra Bonita e Jurumirim

Séries	(p, q)	Estimativas
Ilha Solteira	(1,1)	$\hat{\phi}_1 = 0.8229 (0.0258)$
		$\hat{\theta}_1 = -0.6120 (0.0449)$ $\hat{\sigma}_a^2 = 0.4104$
Barra Bonita	(1,0)	$\hat{\phi}_1 = 0.8214 (0.0251)$
		$\hat{\phi}_1 = -0.2948 (0.0420)$ $\hat{\sigma}_a^2 = 0.5136$
Jurumirim	(1,1)	$\hat{\phi}_1 = 0.5747 (0.0291)$ $\hat{\sigma}_a^2 = 0.5414$

No Passo II, com as séries dos resíduos obtidos no passo anterior, aplicamos (31) e (36) para obter as estimativas iniciais da matriz de covariância  $\Omega$  e o vetor de parâmetros do modelo, respectivamente.

O Passo III considera de forma iterativa, as estimativas da matriz  $\Omega$  para obter estimativas do vetor  $\beta$  e os erros padrão correspondentes.

A Tabela 6 apresenta os resultados de convergência do algoritmo após quatro iterações com precisão  $1 \times 10^{-4}$ . Comparando os resultados apresentados na Tabela 5 notamos que os erros padrão do modelo SURARMA são menores que aqueles dos modelos ARMA.

Tabela 6 – Estimativa final dos parâmetros do modelo SURARMA (1,1) para Ilha Solteira, Barra Bonita e Jurumirim

Séries	Estimativa Final
Ilha Solteira	$\hat{\phi}_1 = 0.7954 (0.0234)$
	$\hat{\theta}_1 = -0.1610 (0.0404)$ $\hat{\sigma}_a^2 = 0.4099$
Barra Bonita	$\hat{\phi}_1 = 0.7616 (0.0188)$
	$\hat{\phi}_1 = -0.3324 (0.0245)$ $\hat{\sigma}_a^2 = 0.5151$
Jurumirim	$\hat{\phi}_1 = 0.6588 (0.0231)$ $\hat{\sigma}_a^2 = 0.5421$

Previsões para um ano a frente para as três séries e intervalos de confiança com dois erros padrão são apresentados na Figura 5.

Figura 5a - Previsão para 1985 com dois erros padrão. Modelo SURARMA de Ilha Solteira

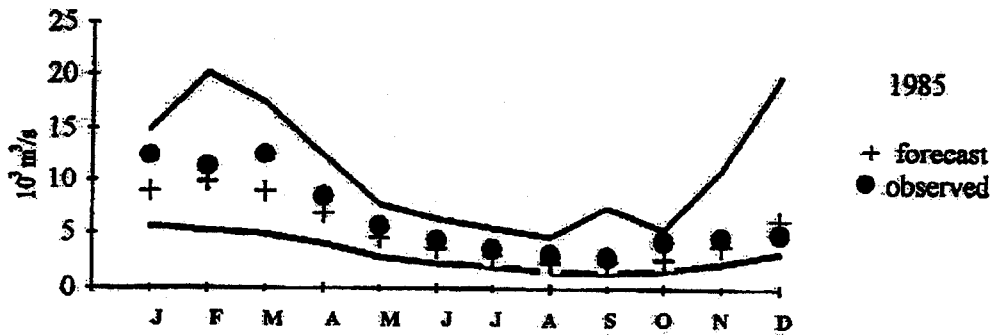


Figura 5b - Previsão para 1985 com dois erros padrão. Modelo SURARMA de Barra Bonita

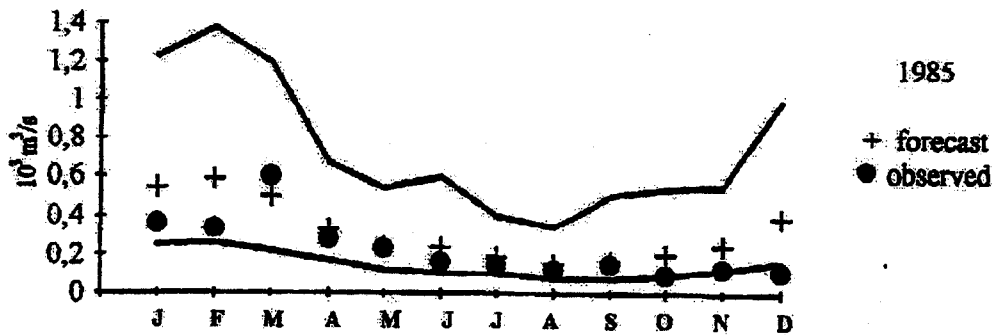
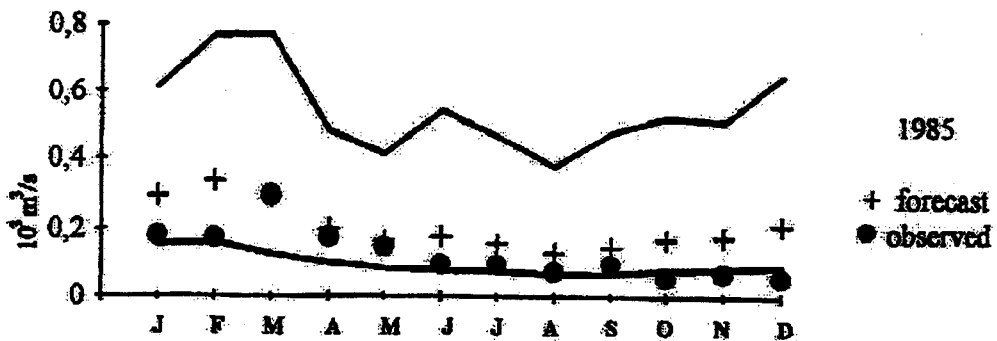


Figura 5c - Previsão para 1985 com dois erros padrão. Modelo SURARMA de Jurumirim



#### 4.4 – Modelo MARMA (p, q) para as Séries: Itumbiara e Três Marias

No Passo I, modelos auto-regressivos são ajustados aos dados. O critério AIC(k) dado em (39) sugere um modelo MAR(3).

Usando os resíduos das três séries obtidas no passo anterior, estima-se diversos modelos MARMA (p, q). Com o critério BIC (p, q) dado em (42) escolheu-se um modelo MARMA (1,1). Estimativas iniciais dos parâmetros do modelo são obtidos no Passo II com os respectivos erros padrão e são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 – Estimativa final do modelo MARMA (1,1) de Furnas, Itumbiara e Três Marias

Séries	$\phi$ Matriz			$\theta$ Matrix			Varição Residual
	Furnas	Itumbiara	Três Marias	Furnas	Itumbiara	Três Marias	
Furnas	0.8693 (0.0355)	-0.0516 (0.0382)	0.0151 (0.0429)	-0.3296 (0.0509)	-0.0814 (0.0509)	0.0513 (0.0577)	0.4301
Itumbiara	0.0188 (0.0362)	-0.7517 (0.0390)	0.0199 (0.0438)	0.0466 (0.0506)	-0.2004 (0.0520)	0.0939 (0.0589)	0.4479
Três Marias	0.0452 (0.0362)	-0.0617 (0.0391)	0.8201 (0.0439)	-0.0423 (0.0362)	-0.1055 (0.0521)	0.2094 (0.0590)	0.4498

Uma análise cuidadosa dos resultados do Passo II permite o máximo uso do algoritmo proposto para as séries de Furnas. Em vista disso, tentamos dois modelos MARMA (1,1) no Passo III.

Inicialmente, o processo iterativo do terceiro passo considera o modelo multivariado completo, isto é, sem restrições impostas aos parâmetros, as estimativas finais obtidas após cinco iterações com precisão  $1 \times 10^{-4}$ . A Tabela 8 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 8 – Estimativa final do modelo MARMA (1,1) sem restrições, para Furnas, Itumbiara e Três Marias

Séries	$\phi$ Matriz			$\theta$ Matrix			Varição Residual
	Furnas	Itumbiara	Três Marias	Furnas	Itumbiara	Três Marias	
Furnas	0.8587 (0.0209)	-0.0477 (0.0243)	0.0204 (0.0260)	-0.3769 (0.0359)	-0.0994 (0.0366)	0.0643 (0.0415)	0.4297
Itumbiara	0.0094 (0.0214)	-0.7444 (0.0248)	0.0288 (0.0266)	0.0106 (0.0366)	-0.2072 (0.0373)	0.1141 (0.0424)	0.4477
Três Marias	0.0359 (0.0214)	-0.0548 (0.0248)	0.8232 (0.0267)	-0.0868 (0.0367)	0.1324 (0.0374)	0.2093 (0.0425)	0.4493

Em seguida, impõe-se restrições aos parâmetros do modelo MARMA (1,1). Em outras palavras, a hipótese de que nem todos os parâmetros diferem de zero é considerada. De fato, o modelo SURARMA parece adequado, neste caso, porém, para efeito de ilustração do algoritmo MARMA, deletamos somente parâmetros dentro do intervalo de um erro padrão.

No caso específico das séries analisadas, quando as restrições  $\phi_{19} = \phi_{21} = \phi_{29} = 0$  e  $\theta_{19} = \theta_{21} = \theta_{29} = 0$  foram impostas, um novo conjunto de estimativas para os outros parâmetros foi obtido, bem como a série de resíduos. A Tabela 9 mostra essas novas estimativas para o modelo MARMA (1,1) restrito, bem como os erros padrão correspondentes.

Tabela 9 – Estimativa inicial do modelo restrito MARMA (1,1) de Furnas, Itumbiara e Três Marias

Séries	$\phi$ Matriz			$\theta$ Matrix			Varição Residual
	Furnas	Itumbiara	Três Marias	Furnas	Itumbiara	Três Marias	
Furnas	0.8688 (0.0205)	-0.0565 (0.0384)	-	-0.3382 (0.0366)	0.0816 (0.0523)	-	0.4299
Itumbiara	-	-0.7389 (0.0327)	-	-	-0.2214 (0.0569)	0.0967 (0.0449)	0.4478
Três Marias	0.0458 (0.0213)	-0.0678 (0.0363)	0.8213 (0.0242)	-	0.1052 (0.0566)	-0.2177 (0.0436)	0.4497

As estimativas finais dos parâmetros do modelo MARMA (1,1) restrito foram obtidas após quatro iterações no Passo III do algoritmo proposto com  $1 \times 10^{-4}$  de precisão. A Tabela



10 resume os principais resultados das estimativas, bem como os erros padrão mostrados entre parênteses.

Tabela 10 – Estimativa final do modelo restrito MARMA (1,1) de Furnas, Itumbiara e Três Marias

Séries	$\phi$ Matriz			$\theta$ Matrix		Variação Residual	
	Furnas	Itumbiara	Três Marias	Furnas	Itumbiara	Três Marias	
Furnas	0.86858 (0.0206)	-0.05515 (0.0354)	-	-0.3397 (0.0363)	0.0827 (0.0363)	-	0.4299
Itumbiara	-	-0.7380 (0.0333)	-	-	-0.2239 (0.0565)	0.0971 (0.0445)	0.4478
Três Marias	0.0459 (0.0215)	-0.0665 (0.0369)	0.8202 (0.0243)	-	0.1093 (0.0562)	-0.2218 (0.0431)	0.4497

Previsões para as três séries para um ano a frente com intervalos de dois erros padrão são apresentadas na Figura 6.

Figura 6a - Previsão para 1985 com dois erros padrão. Modelo MARMA de Furnas

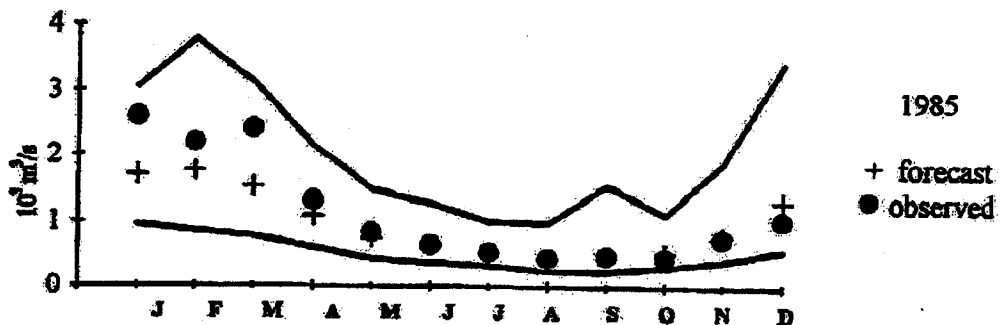


Figura 6b - Previsão para 1985 com dois erros padrão. Modelo MARMA de Itumbiara

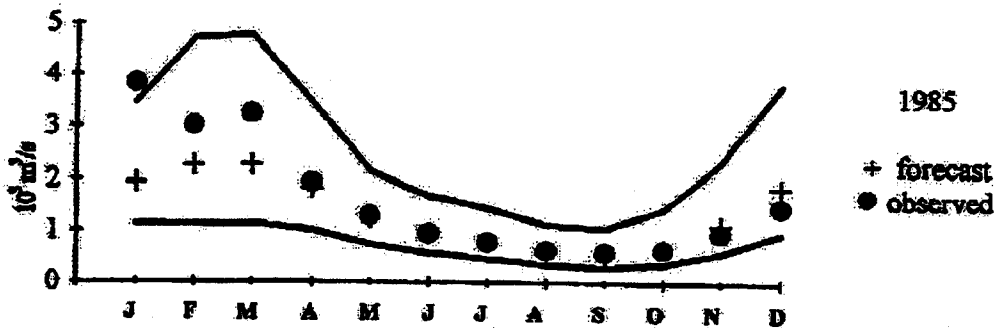
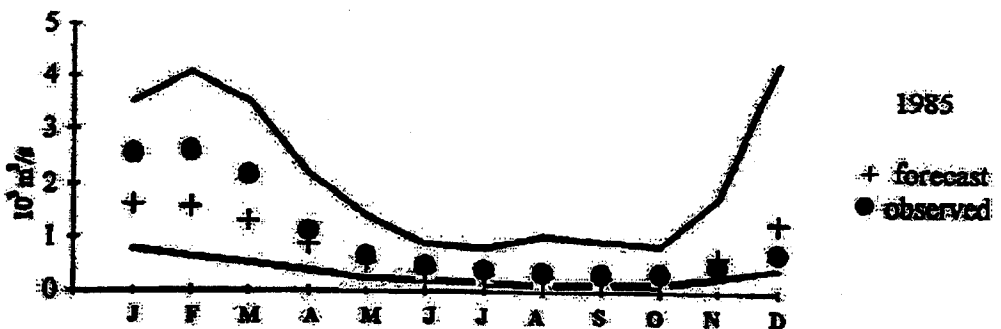


Figura 6c - Previsão para 1985 com dois erros padrão. Modelo MARMA de Três Marias.



## 5. COMENTÁRIOS FINAIS

Propriedades teóricas dos procedimentos de identificação e estimação apresentados neste artigo são apresentadas em Hannan e Deistler (1988). Resultados de simulação e aplicações destes métodos e outros relacionados com ele, são apresentados em Saikkonen (1986), Newbold e Hotopp (1986), Hannan e McDougall (1988), Poskitt (1980), Koreisha e Pukkila (1989, 1990 a, b), Pukkila et al. (1990) e Galbraith e Linde-Walsh (1997).

Os tempos de computação em um IBM 4381 R14 foram respectivamente 3.06 s para o ARMA, 10.52 s para o ARMAX,  $(4.67 + 3 \times 3,06)$  s para o SURARMA e 19.78 s para o MARMA.

### AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos ao falecido Professor E. J. Hannan, por seu incentivo e por tornar disponível muitos de seus artigos na época ainda não publicados.

### REFERÊNCIAS

- CAMACHO, F.; MCLEOD, A. I. E HIPEL, K. W. (1985) – Contemporaneous autorregressive-moving average (CARMA) modelling in water resources. *Water Resources Bulletin*, 21, 709-720.
- CAMACHO, F. E MCLEOD, A. I. (1987) – Contemporaneous bivariate time series. *Biometrika*, 74, 103-113.
- GALBRAITH, J. W. E LINDE-WALSH, V. (1997) – On some simple, autorregression-based estimation and identification techniques for ARMA models. *Biometrika*, 84, 685-696.
- HANNAN, E. J. E DEISTLER, M. (1988) – The Statistical Theory and Linear Systems. *John Wiley & Sons*, N. Y.
- HANNAN, E. J. E MCDUGALL, A. J. (1988) – Regression procedures for ARMA estimation. *J. Am. Statist. Ass.*, 83, 490-498.
- HANNAN, E. J. E RISSANEN, J. (1983) – Recursive estimation of mixed autorregressive-moving average estimator. *Biometrika*, 69, 81-94. Correction. *Biometrika*, 70, 303.
- KOREISHA, S. E PUKKILA, T. (1989) – Fast linear estimation methods for vector autorregressive moving-average models. *J. of Time Series An.*, 10, 325-339.
- KOREISHA, S. E PUKKILA, T. (1990 a) – Linear methods for estimating ARMA and regression models with serial correlation. *Commun. Statist. Simula*, 19, 71-102.
- KOREISHA, S. E PUKKILA, T. (1990 b) – A generalized least-squares approach for estimation of autorregressive moving average models. *J. of Time Series An.*, 11, 139-151.
- NELSON, C. R. (1976) – Gains in efficiency from joint estimation of system of autorregressive-moving average processes. *J. of Econometrics*, 4, 331-348.
- NEWBOLD, P. E HOTOPP, S. M. (1986) – Testing causality using efficiently parametrized vector ARMA models. *App. Math. And Comp.*, 20, 329-348.
- POSKITT, D. S. (1987) – A modified Hannan-Rissanen strategy for mixed autorregressive-moving average order determination. *Biometrika*, 74, 781-790.
- POSKITT, D. S. (1989) – A method for the estimation and identification of transfer function models. *J. Roy. Statist. Soc. B*, 51, 29-46.
- PUKKILA, T.; KOREISHA, S. E KALLINEN, A. (1990) – The identification of ARMA models. *Biometrika*, 73, 537-548.
- SAIKKONEN, P. (1986) – Asymptotic properties of some preliminary estimators for autorregressive moving average time series models. *J. of Time Series An.*, 7, 133-155.

- SALES, P. R. H. (1977) – A stochastic deterministic model for hydrological time series forecasting, *M. Sc. Thesis*, COPPE/UFRJ.
- SALES, P. R. H. (1989) – Linear procedures for identification and parameter estimation of models for uni and multivariate time series, *D. Sc. Thesis*, COPPE/UFRJ.
- SALES, P. R. H.; PEREIRA, B. DE B. E VIEIRA, A. M. (1987) – Linear procedures for identification and estimation of ARMA models for hydrological time series *Annals of the VII Brazilian Symposium of Hydrology and Hydric Resources*, Salvador, Bahia, 605-615.
- SALES, P. R. H.; PEREIRA, B. DE B. E VIEIRA, A. M. (1989 a) – A linear procedure for identification of transfer function models for hydrological time series. *Annals of the IV Lusitanian-Brazilian Symposium on Hydraulics and Hydric Resources*, Lisboa, Portugal, 321-336.
- SALES, P. R. H.; PEREIRA, B. DE B. E VIEIRA, A. M. (1989 b) – A linear procedure for identification and estimation of SURARMA models applied to multivariate hydrological time series. *Annals of the IV Lusitanian-Brazilian Symposium of Hydraulics and Hydric Resources*. Lisboa, Portugal, 283-248.
- SALLAS, J. D.; DELLEUR, J. W.; YEVJEVICH, V. E LANE, W. L. – Applied Modelling of Hydrologic Time Series. *Water Resources Publication*.
- TERRY, L. A.; PEREIRA, M. V. F.; ARARIPE NETO, T. A.; SILVA, L. F. C. A. E SALES, P. R. H. (1986) – Coordinating the energy generation of the Brazilian national hydrothermal electrical generating system. *Interfaces*, 16, 16-38.

#### ABSTRACT

This paper presents linear procedures for identification and parameter estimation of ARMA, ARMAX (TF), SURARMA (CARMA), MARMA (VARMA) and MARMAX models. The algorithms were based on Hannan and co-authors works and applied to hydrological time series of monthly average natural inflows of reservoirs in Brazil.

**Keywords:** ARMA, ARMAX, SURARMA, MARMA and MARMAX models. Natural inflow series Regression/Autorregressions. Natural inflow series. Information criteria. Endogenous, exogenous series.